Préparation à l'entrée en Terminale spécialité « mathématiques »
Partie 1 : les suites

EXERCICE 1

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (U_n).
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
3. En déduire le sens de variations de la suite (U_n).
4. On donne l'algorithme suivant écrit en langage Python :

```python
def seuil():
    n=0
    u=1
    while u>0.01:
        n=n+1
        u=1/(n+1)
    return(n)
```

a) Quelle est la valeur de ***n*** à la fin de cet algorithme ?
b) Que représente cette valeur de ***n*** ?

EXERCICE 2

En 2020, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par U_n le nombre d'abonnés en $2020 + n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2021 et 2022.
2. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
3. Quelle est la nature de la suite (U_n) ?
4. En déduire une expression de U_n en fonction de n.
5. On considère l'algorithme suivant écrit en langage Python :

```python
def suite(n):
    u=6000
    for i in range(1,n+1):
        u=u+750
    return(u)
```

Quelle est le rôle de cet algorithme ?

6. Ecrire un algorithme en langage Python pour déterminer en quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2020 ? Quelle est cette année ?

EXERCICE 3

Lors du lancement d'un hebdomadaire, 1 200 exemplaires ont été vendus.
Une étude de marché prévoit une progression des ventes de 2 % chaque semaine.
On modélise le nombre d'hebdomadaires vendus par une suite (U_n) où U_n représente le nombre de journaux vendus durant la n-ième semaine après le début de l'opération.
On a donc $U_0 = 1\,200$.

1. Calculer U_1 et U_2. Interpréter U_2 dans le contexte de l'exercice.

2. a) Pour tout entier n, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
   En déduire la nature de la suite (U_n) en précisant sa raison et son premier terme.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n.

3. Voici un programme rédigé en langage Python :

```
def suite():
    u=1200
    s=1200
    n=0
    while s<30000:
        n=n+1
        u=u*1.02
        s=s+u
    return(n)
```

Le programme retourne la valeur 20. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Déterminer le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an.

EXERCICE 4

Aujourd'hui les chardons (une plante vivace) ont envahi 300 m² des champs d'une région.
Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m² suite à la dissémination des graines.
Pour tout entier naturel n, on note U_n la surface envahie par les chardons, en m², après n semaines ; on a donc $U_0 = 300$ m².

1. a) Calculer U_1 et U_2
   b) Montrer que la suite (U_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1{,}05.U_n + 15$.

2. On considère la suite (V_n), définie pour tout entier naturel n, par : $V_n = U_n + 300$.
   a) Calculer V_0, puis montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer V_n en fonction de n, puis montrer que $U_n = 600 \times 1{,}05^n - 300$.

3. a) Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

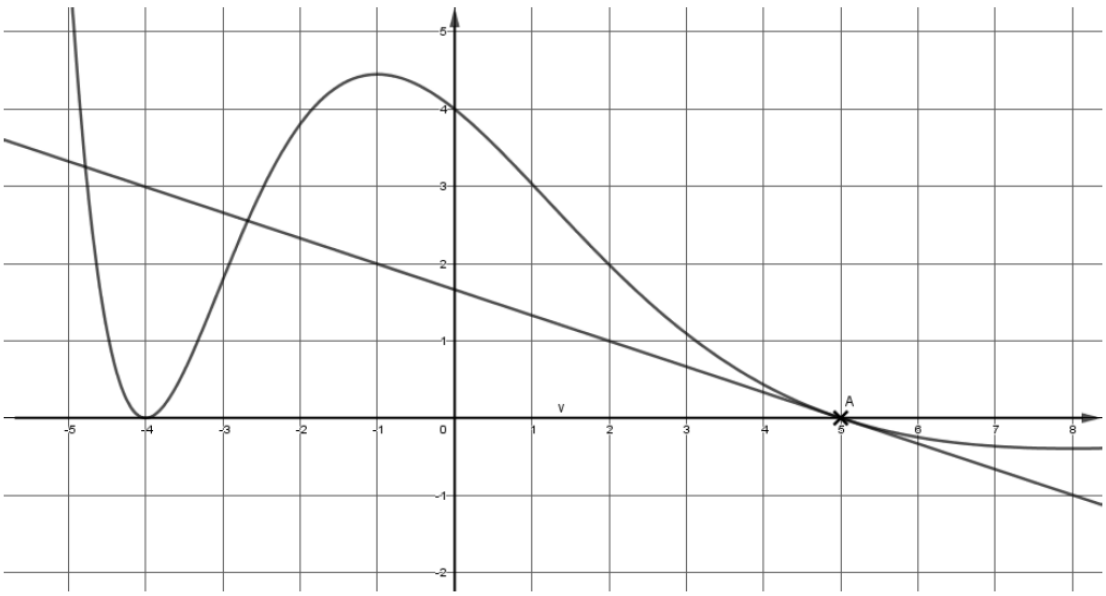
b) Compléter les lignes 4 et 5 du programme écrit en langage Python qui détermine le nombre de semaines à partir duquel la surface, envahie par les chardons, aura doublé.

```
1  def seuil():
2      u=300
3      n=0
4      while .....:
5          u=......
6          n=n+1
7      return(n)
```

Partie 2 : Les fonctions

EXERCICE 1

On se place dans un repère orthonormé du plan.
Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative notée C d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite D est tangente à la courbe C au point A(5 ; 0).



On note $f\,'$ la dérivée de la fonction f.

a) Lire graphiquement $f'(5)$.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, donner le signe de $f\,'(x)$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$.
On note f ' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$.

2. En déduire le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

3. Déterminer l'abscisse du point de la courbe de f pour laquelle le coefficient directeur de la tangente vaut –5,25.

4. On note x_0 la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle [4 ; 5].
   On considère l'algorithme suivant écrit en langage Python.

```python
def zero_de f(n):
    a=4
    b=5
    for k in range(n):
        x=(a+b)/2
        if x**3-3*x**2-9*x+3<0:
            a=x
        else:
            b=x
    return(a,b)
```

On applique cet algorithme pour $n = 3$.
Reproduire et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

Itération	$x = \dfrac{a+b}{2}$	$f(x) < 0$?	a	b	Amplitude de [a ; b]
k = 0	4,5	Oui	4,5	5	0,5
k = 1					
k = 2					

En déduire un encadrement de x_0 d'amplitude 0,125 par deux nombres décimaux.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

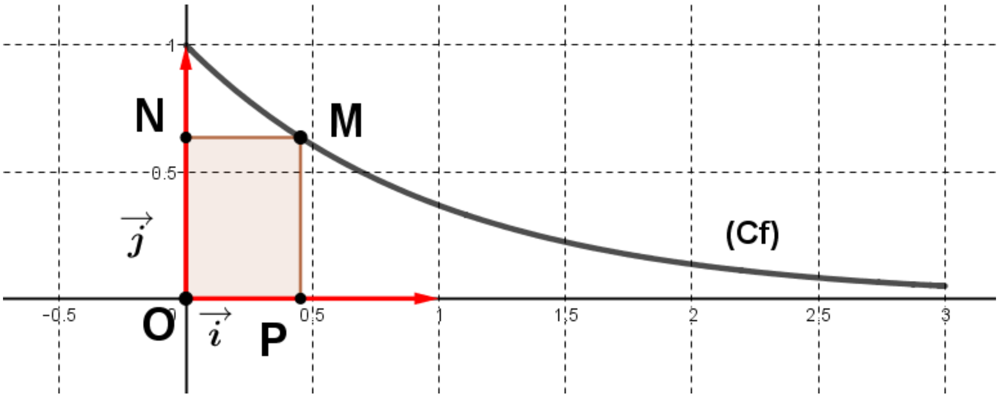
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^x - 1 > 0$.

4. a) Calculer $g'(x)$. Puis en déduire son signe sur $\mathbb{R}$
   b) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$. Puis déterminer le signe de $g(x)$.
   c) En déduire la position relative de (C) par rapport à (T).

EXERCICE 4

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.
Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 3$ et la courbe (Cf) représentative de la fonction f définie sur [0 ; 3] par $f(x) = e^{-x}$



L'enclos est représenté par le rectangle MNOP où O est l'origine du repère et M un point de (Cf), P et N étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
On note x l'abscisse du point M avec x variant dans l'intervalle [0 ; 3].
Le but de l'exercice est de déterminer la position du point M permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2, est donnée en fonction de x par :
   $g(x) = xe^{-x}$ pour x dans l'intervalle [0 ; 3].

2. La fonction g est dérivable sur [0 ; 3]. Montrer que pour tout x de l'intervalle [0 ; 3],
   On a : $g'(x) = (1 - x)e^{-x}$.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction g sur [0 ; 3].

4. Où doit-on placer le point M pour obtenir une superficie d'enclos maximale ?
   Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2

Partie 3 : Probabilités

EXERCICE 1

Une entreprise qui fabrique des aiguilles dispose de deux sites de production, le site A et le site B. Le site A produit les trois-quarts des aiguilles, le site B l'autre quart.
Certaines aiguilles peuvent présenter un défaut. Une étude de contrôle de qualité a révélé que :

- 2% des aiguilles du site A sont défectueuses ;
- 4% des aiguilles du site B sont défectueuses.

Les aiguilles provenant des deux sites sont mélangées et vendues ensemble par lots.
On choisit une aiguille au hasard dans un lot et on considère les événements suivants :

- A : « l'aiguille provient du site A » ;
- B : « l'aiguille provient du site B » ;
- D : « l'aiguille présente un défaut ».

L'événement contraire de D est noté $\overline{\mathrm{D}}$.

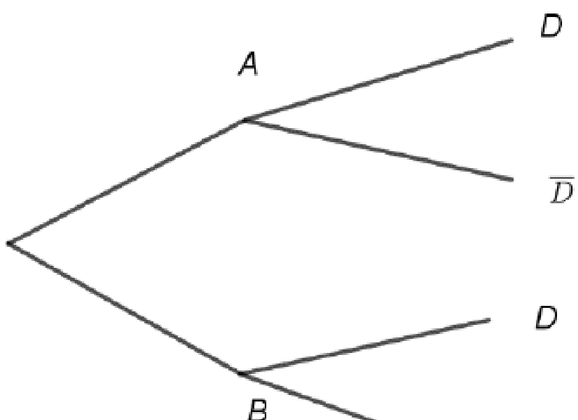
1. D'après les données de l'énoncé, donner la valeur de la probabilité de l'événement A que l'on notera (A).

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous en indiquant les probabilités sur les branches.

3. Quelle est la probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A ?

4. Montrer que P(D) = 0,025.

5. Après inspection, l'aiguille choisie se révèle défectueuse.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite sur le site A ?



EXERCICE 2

Au sein d'un lycée, parmi les élèves de première ayant choisi la spécialité mathématique, il y a 110 filles dont 5 ne poursuivent pas la spécialité en terminale et 90 garçons dont 8 ne poursuivent pas la spécialité.
On interroge au hasard un élève et on définit les événements suivants :

- F l'événement : « L'élève interrogé est une fille »,
- G l'événement : « L'élève interrogé est un garçon »,
- S l'événement : « L'élève poursuit la spécialité mathématique »

On donnera les valeurs exactes pour chacune des questions.

1. Calculer P(G), $P(G \cap \overline{S})$ et $P(\overline{S})$.

2. L'élève interrogé ne poursuit pas la spécialité. Calculer la probabilité que ce soit un garçon.

3. Les événements G et S sont-ils indépendants ?

EXERCICE 3

Un parent d'élèves propose un jeu pour la fête de l'école.
Une urne opaque contient 100 billes indiscernables au toucher :
10 billes rouges, 30 billes blanches et 60 billes vertes.
Pour une partie, chaque joueur doit miser 2 jetons. Ensuite, le joueur prélève une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille prélevée est rouge, le joueur récupère 8 jetons.
- Si la bille est blanche, le joueur récupère 4 jetons.
- Si la bille est verte, le joueur ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en nombre de jetons, c'est-à-dire, le nombre de jetons gagnés diminué de la mise.

1. a) Établir que la loi de probabilité de X est donnée par :

Valeurs a prises par X	-2	2	6
P(X = a)	0,6	0,3	0,1

b) Démontrer que le jeu est équitable, c'est-à-dire que l'espérance de X est nulle.

c) Calculer la variance puis l'écart-type de X. On arrondira au centième.

2. Pour financer les différentes actions de l'école, les organisateurs de la fête veulent modifier le jeu pour qu'il leur devienne favorable. Ils décident alors d'ajouter des billes vertes dans l'urne.
Combien de billes vertes doit-on ajouter dans l'urne pour que l'espérance du jeu soit égale à -1 ?